**(MAT 3301)**

# B.Sc. (MPC, MPCS, MSCS, MECS, MPM) (CBCS) Examinations

MARCH - 2021

EXAMINATION AT THE END OF SEMESTER- III

PART - II MATHEMATICS

## ABSTRACT ALGEBRA

TIME : Three hours

Maximum : 60 Marks

### Section-1

**Answer any FIVE of the following questions.**
**Each question carries 04 mark.**

**( 5 x 4 = 20 M)**

( ఇచ్చిన వానిలో ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు జవాబులిమ్ము,

ప్రతి ప్రశ్నకు నాలుగు మార్కులు.)

1. Show that Set $Q^+$ of all positive rational numbers forms an abelian group under the composition defined by $o$ such that $aob = \frac{ab}{3}$.

( 'o' ను $aob = \frac{ab}{3}$ గా నిర్వసిస్తే ధన అకరణీయ సంఖ్యసమితి. $Q^+$ ఎబెలియాన్ సమూహమును ఏర్పరుస్తునది అని చూపండి)

2. Show that a group G is abelian iff $(ab)^2 = a^2b^2$.

(సమూహము G ఎబిలియన్ సమూహము కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము అని చూపండి $(ab)^2 = a^2b^2$.)

3. If H is a subgroup of a group G then prove $H^{-1}$ =H.

( H అనేది Gయొక్క ఉపసమూహము అయితే $H^{-1}$ =H అని నిరూపించండి.)

4. Prove that if H and K are two subgroups of a group G then H ∩ K is also a subgroup of G.

( H, K లు సమూహము G కు ఉపసమూహము లు అయితే $H \cap K_2$ కూడా ఉపసమూహము అని చూపండి.)

5. If M,N are normal subgroups of G then show that MN is also a normal subgroup of G.

( M,N లు G యొక్క అభిలంబ ఉపసమూహాలు అయితే MN కూడా ఉపసమూహము అని చూపండి. కూడా అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపండి.)

6. If G is a group and $a \in G$ then prove that the normalizer $N(a)$ of $a$ in G is a subgroup of G.

(G ఒక సమూహము $a \in G$ అయితే $G$ లో $a$ యొక్క నార్మలైజెర్ $(a)$, $G$ కు ఉపసమూహము అని చూపండి.)

7. Prove that every homomorphic image of an abelian group is abelian.

(సమూహము యొక్క సమరూపత ప్రతిబింబము కూడా సమూహము అవుతుందనినిరూపించండి.)

(PTO)

8. If $f$ is a homomorphism from a group G into a group $G^1$ then prove that $Kerf$ is a normal subgroup of G

( $f$ అనేది G నుంచి G' కు సమరూపత ప్రమేయము అయితే $Kerf$ అనేది అభిలంబ ఉపసమూహము అని నిరూపించండి.)

9. If f = ( 1 2 3 4 5 8 7 6 ) ,g = ( 4 1 5 6 7 3 2 8 ) are cyclic permutations, show that $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

( f = ( 1 2 3 4 5 8 7 6 ) ,g = ( 4 1 5 6 7 3 2 8 ) చక్రీయప్రస్తారాలు అయితే $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$ అని చూపండి )

10. Express the permutation $\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6}{6\,5\,4\,3\,1\,2}$ as the product of disjoint cycles.

( $\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6}{6\,5\,4\,3\,1\,2}$ అనే ప్రస్తారమును వియుక్త చక్రాల లబ్ధంగా రాయుము.)

## Section - II

**Answer any FIVE(05) of the following questions**

**Each question carries 08 Marks.** **(5 x 8 = 40 M)**

**(ఈ క్రింది వానిలో ఏవైనా ఐదు(05) ప్రశ్నలకు జవాబులిమ్ము ,**
**ప్రతి ప్రశ్నకు 08 మార్కులు.)**

11.

(a) If $G = Q - \{1\}$ and $*$ is defined on G as $a * b = a + b - ab$ then show that $(G,*)$ is an abelian group.

($G = Q - \{1\}$ , '*' ను $a * b = a + b - ab$ గా నిర్వచిస్తే $(G,*)$ ఎబిలియన్ సమూహము అని చూపండి.

**OR**

(b) Show that n**th** roots of unity form an abelian group under multiplication.

( '1' యొక్క n వ మూలాల సమితి గుణకారం దృష్ట్యా ఎబిలియన్ సమూహము ను ఏర్పరుస్తాయని చూపండి )

12.

(a) Prove that a finite nonempty complex H of a group G a subgroup of G iff $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$. (G యొక్క పరిమిత శూన్యేతర కాంప్లెక్స్ H ఉపసమూహము కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$. అని నిరూపించండి.) **OR**

(b) State and prove Lagrange's theorem on finite groups. ( పరిమిత సమూహాలకు లెగ్రాంజెస్ సిద్ధాంతము రా సి నిరూపించుము. )

(PTO)

13.

(a) If H is a subgroup of G and N is a normal subgroup of G then Prove that

(i) $H \cap N$ is a Normal subgroup of H.

(ii) N is a Normal subgroup of HN.

( H అనేది G కు ఉపసమూహము, N అనేది G కు అభిలంబ ఉపసమూహము అయితే

(i) $H \cap N$ అనేది H కు అభిలంబ ఉపసమూహము .

(ii) N అనేది HN కు అభిలంబ ఉపసమూహము అని నిరూపించుము.)

**OR**

(b) If G is a group then Prove the centre Z of G is a normal subgroup of G.

( Z అనేది సమూహము G యొక్క కేంద్రము అయితే Z సాధారణ సమూహము అని నిరూపించుము .)

14.

(a) Prove that If N is a normal subgroup of a group G then there exists an epimorphism $f$ from G onto G/N such that Ker$f$ = N.

( N అనేది సమూహము G యొక్క అభిలంబ ఉపసమూహము అయితే Ker$f$ = N అయ్యేటట్లు, $f : G \to \frac{G}{N}$ వ్యవస్థితం అని చూపండి .)

**OR**

(b).State and Prove fundamental theorem of Homomorphism groups.

(సమరూపత మూల సిద్ధాంతము రా సి నిరూపించుము)

15.

(a)Prove that the set $A_n$ of all even permutations on n symbols is a normal subgroup of

the permutation group $S_n$ of $n$ symbols and $o(A_n) = \frac{1}{2}(n!)$.

( $A_n$ అనేది n సంకేతాల మీదా నిర్వచించిన సరి ప్రస్తారముల సమితి , n సంకేతాల మీదా నిర్వచించిన $S_n$ అనే సమూహమునకు అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపి మరియు

$o(A_n) = ½(n!)$ అని నిరూపించండి. )

**OR**

(b).State and prove cayley's theorem.(క్రెయిలీస్ సిద్ధాంతాన్ని రాసి నిరూపించుము . )

…… * ……

(MAT N-3301)

# B.Sc Degree (CBCS) Examinations

FEBRUARY-2022

EXAMINATION AT THE END OF SEMESTER-III

PART-II MATHEMATICS

## ABSTRACT ALGEBRA

TIME : Three hours

Maximum : 60 Marks

### SECTION-A

Answer any **FIVE** of the following questions. $5 \times 4 = 20\ M$

1. Prove that in a group $G$, inverse of any element is unique.
2. Prove that the set $Z$ of all integers form an abelian group w.r.to the operations defined by $a * b = a + b + 2$, for all $a, b \in Z$.
3. Prove that a necessary and sufficient condition for a non empty subset of a group $G$ to be a subgroup of $G$ is that $HH^{-1} = H$.
4. If $a, b$ are any two elements of a group $(G, .)$ and $H$ any subgroup of $G$, then prove that $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.
5. If $N, M$ are normal subgroups of $G$, then prove that $NM$ is also a normal subgroup of $G$.
6. If $f$ is a homomorphism of a group $G$ into a group $G'$, then prove that the kernel of $f$ is a normal subgroup of $G$.
7. Examine whether the following permutation is even or odd $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.
8. Prove that every cyclic group is an abelian group.
9. Prove that a field has no zero divisors.
10. Prove that the intersection of two ideals of a ring $R$ is an ideal of $R$.

### SECTION-B

Answer **ALL** questions. Each question carries 8 marks $5 \times 8 = 40\ M$

11. a) Prove that a finite semi group $(G, .)$ satisfying the cancellation laws is a group.

(OR)

b) Prove that the $n^{th}$ roots of unity under multiplication form a finite group.

12. a) Prove that a non empty complex $H$ of a group $G$ is a subgroup of $G$ iff ( i)$a \in H, bH \Rightarrow ab \in H$ and (ii) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

(OR)

b) State and prove Lagrange's theorem.

13. a) If $H$ is a subgroup of $G$ and $N$ is a normal subgroup of $G$, then prove that (i) $H \cap N$ is a normal subgroup of $H$ and (ii) $N$ is a normal subgroup of $HN$.

(OR)

b) Prove that every homomorphic image of a group $G$ is isomorphic to some quotient group of $G$.

14. a) Let $S_n$ be a symmetric group of $n$ symbols and let $A_n$ be the group of even permutations. Then show that $A_n$ is normal in $S_n$ and $O(A_n) = \frac{1}{2}n!$.

(OR)

b) If $p$ is a prime number then prove that every group of order $p$ is a cyclic group.

15. a) Define an Integral domain and field. Prove that every finite Integral domain is a field.

(OR)

b) Define principal ideal ring. Prove that $Z$ is a principal ideal ring.

(MAT 3301)

**B.Sc. (Maths Combinations) (CBCS) Examinations**

**FEBRUARY - 2022**

**EXAMINATION AT THE END OF III SEMESTER**

**PART - II MATHEMATICS - 3**

**ABSTRACT ALGEBRA**

TIME : 3 hours

Maximum : 60 Marks

**SECTION-A**

Answer any FIVE questions. 5x4=20 M

1. Show that a Group G is abelian iff $(ab)^2 = a^2b^2\ \forall a,b \in G$. ?
   సమూహము G లో $(ab)^2 = a^2b^2\ \forall a,b \in G$ కావటానికి అవశ్యక పర్యాప్త నియమము G వినిమయ సమూహము అని చూపండి. ?

2. Prove that in a Group, Inverse of any element is unique. ?
   సమూహము నందు ఏదైనా మూలకపు విలోమము ఏకైకము అని నిరూపించండి. ?

3. Show that Intersection of two Sub Groups of a group is also a Sub group. ?
   సమూహము యొక్క రెండు ఉపసమూహముల ఛేదనము మరల ఉపసమూహము అవుతుందని చూపుము. ?

4. Let H be a Sub Group of a Group G and $a,b \in G$ then $Ha = Hb$ iff $ab^{-1} \in H$. ?
   a,b లు సమూహము Gలోని మూలకాలు, G యొక్క ఉప సమూహము H అయితే $Ha = Hb$ కావటానికి అవశ్యక పర్యాప్త నియమము $ab^{-1} \in H$ అని చూపండి. ?

5. Show that every Sub Group of an abelian Group is normal. ?
   ఎబిలియన్ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము అభిలంబ ఉపసమూహము అవుతుందని చూపండి. ?

6. If G is a Group and H is a Sub group of Index 2 in G, then prove that H is a normal Sub Group of G. ?
   సమూహము Gలో Hయొక్క సూచిక 2 అయితే Gలో అభిలంబ ఉపసమూహమని చూపండి. ?

7. Let G, $G^1$ be two groups with identity elements e and $e^1$ respectively. If $f : G \to G^1$ is a homomorphism, then (i) $f(e) = e^1$, (ii) $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}\ \forall a \in G$. ?
   G, $G^1$ లు సమూహాలు మరియు G, $G^1$లలో తత్సమ మూలకములు e మరియు $e^1$, $f : G \to G^1$ సమరూపత అయితే (i) $f(e) = e^1$, (ii) $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}\ \forall a \in G$ అని చూపండి. ?

8. If $f$ is a homomorphism from a Group G into a Group $G^1$ then prove that Ker $f$ is a normal sub group of G. ?
   $f$ అనునది సమూహము G నుండి $G^1$ కు సమరూపము అయిన G కి Ker $f$ అభిలంబ ఉప సమూహము అవుతుందని చూపండి. ?

9. Express the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 8 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ as the product of disjoint cycles. ?
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 8 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ అనే ప్రస్తారమును వియుక్త చక్రాల లబ్దంగా వ్రాయుము. ?

10. Prove that every cyclic group is abelian. ?
    ప్రతి చక్రీయ సమూహం వినిమయ సమూహమవుతుందని చూపండి. ?

(P.T.O)

(2)

# SECTION-B

Answer any FIVE(05) of the following questions

Each question carries 08 Marks. (5 x 8 = 40 M)

(ఈ క్రింది వానిలో ఏవైనా ఐదు(05) ప్రశ్నలకు జవాబులిమ్ము ,
ప్రతి ప్రశ్నకు 08 మార్కులు.)

11.

(a) If $G = Q-\{1\}$ and $*$ is defined on G as $a*b = a+b-ab$ then show that $(G,*)$ is an abelian group.

($G = Q-\{1\}$, '$*$' ను $a*b = a+b-ab$ గా నిర్వచిస్తే $(G,*)$ ఎబిలియన్ సమూహము అని చూపండి.

OR

(b) Show that nth roots of unity form an abelian group under multiplication.

( '1' యొక్క n వ మూలాల సమితి గుణకారం దృష్ట్యా ఎబిలియన్ సమూహము ను ఏర్పరుస్తాయని చూపండి )

12.

(a) Prove that a finite nonempty complex H of a group G a subgroup of G iff $a,b \in H \Rightarrow ab \in H$. (G యొక్క పరిమిత శూన్యేతర కాంప్లెక్స్ H ఉపసమూహము కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a,b \in H \Rightarrow ab \in H$. అని నిరూపించండి.)

OR

(b) State and prove Lagrange's theorem on finite groups. ( పరిమిత సమూహాలకు లెగ్రాంజెస్ సిద్ధాంతము రా సి నిరూపించుము. )

13.

(a) If H is a subgroup of G and N is a normal subgroup of G then Prove that

(i) $H \cap N$ is a Normal subgroup of H.
(ii) N is a Normal subgroup of HN.

( H అనేది G కు ఉపసమూహము, N అనేది G కు అభిలంబ ఉపసమూహము అయితే

(i) $H \cap N$ అనేది H కు అభిలంబ ఉపసమూహము .

(ii) N అనేది HN కు అభిలంబ ఉపసమూహము అని నిరూపించుము.)

OR

(b) If G is a group then Prove the centre Z of G is a normal subgroup of G.

( Z అనేది సమూహము G యొక్క కేంద్రము అయితే Z సాధారణ సమూహము అని నిరూపించుము .)

14.

(a) Prove that If N is a normal subgroup of a group G then there exists an epimorphism $f$ from G onto G/N such that Ker$f$ = N.

( N అనేది సమూహము G యొక్క అభిలంబ ఉపసమూహము అయితే Ker$f$ = N అయ్యేటట్లు, $f: G \to \frac{G}{N}$ వ్యవస్థితం అని చూపండి .)

OR

(b).State and Prove fundamental theorem of Homomorphism groups.

(సమరూపత మూల సిద్ధాంతము రా సి నిరూపించుము)

15.

(a)Prove that the set $A_n$ of all even permutations on n symbols is a normal subgroup of the permutation group $S_n$ of $n$ symbols and $o(A_n) = \frac{1}{2}(n!)$.

( $A_n$ అనేది n సంకేతాల మీదా నిర్వచించిన సరి ప్రస్తారముల సమితి , n సంకేతాల మీదా నిర్వచించిన $S_n$ అనే సమూహమునకు అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపి మరియు

$o(A_n) = \frac{1}{2}(n!)$ అని నిరూపించండి. )

OR

(b).State and prove cayley's theorem.(క్రెయిలీస్ సిద్ధాంతాన్ని రాసి నిరూపించుము . )

* * * *